Geometria III

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
7 giugno 2018

Si svolgano i seguenti quattro esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio tridimensionale ordinario dotato della topologia euclidea e siano $\mathbb{S}^2$, D, E e X i seguenti sottospazi topologici di $\mathbb{R}^3$:

- $\mathbb{S}^2$ è la sfera unitaria standard $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\}$ di $\mathbb{R}^3$,
- D è il diametro $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -1 \leq x \leq 1,\, y=z=0\}$ di $\mathbb{S}^2$,
- E è l'equatore $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2=1,\, z=0\}$ di $\mathbb{S}^2$,
- $X := \mathbb{S}^2 \cup D$.

(1a) Si calcolino i gruppi di omologia $H_q(X)$ e i gruppi di omologia relativa $H_q(X, D \cup E)$ per ogni $q \in \mathbb{N}$.

(1b) Si dica se $D \cup E$ è un retratto di X e/o un retratto di deformazione di X.

Esercizio 2. Sia T il toro di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando la circonferenza

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y=0, (x-2)^2+z^2=1\}$$

attorno all'asse z. Siano L e L' i due dischi chiusi

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y=0, (x-2)^2+z^2 \leq 1\} \quad \text{e} \quad L' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0,\ (x+2)^2+z^2 \leq 1\}$$

e sia $Y = T \cup L \cup L'$. Supponiamo Y sia dotato della topologia euclidea. Si calcoli il gruppo fondamentale di Y.

SOLUZIONE: Lo spazio Y è omotopicamente equivalente allo spazio $S^2 \vee S^2 \vee S^1$ (l'unione a un punto di S^1 e due copie di S^2): Y ha una struttura di CW-complesso ottenuta fissando due punti sul bordo dei dischi L e L' (ad es. sulla circonferenza interna del toro), prendendo quattro 1-celle (il bordo di L, il bordo di L', due archi che formano la circonferenza interna del toro) e quattro 2-celle (L, L' e le due metà del toro separate da L e L').

Se A è il sottocomplesso chiuso contraibile formato da L, e A' quello formato da L' si ottiene, in due passi, che Y è omotopicamente equivalente all'unione di due sfere S, S' con due coppie di punti identificati ($P \sim P'$, $Q \sim Q'$). Sia a un cammino da P a Q su S e a' un cammino da P' a Q' su S'. Sia inoltre c un cammino da P a P' (che si può 'aggiungere' ottenendo uno spazio omotopicamente equivalente). Contraendo prima a e poi a', si ottiene $S^2 \vee S^2 \vee S^1$.

Dunque $\pi(Y, y_0) \simeq \pi(S^2 \vee S^2 \vee S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$. L'ultimo isomorfismo si può ottenere ad esempio applicando il teorema di Seifert-Van Kampen.

Esercizio 3. Si calcoli il seguente integrale improprio mediante il teorema dei residui:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^3-1} dx.$$

SOLUZIONE: (3a) La funzione meromorfa $h(z) = \frac{z-1}{z^3-1}$ ha tre singolarità nelle 3 radici cubiche di 1: una eliminabile per $z = 1$ e due semplici per $z_{\pm 1} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$. Posso quindi considerare al posto di h la funzione meromorfa $f(z) = 1/(z^2 + z + 1)$. Si consideri la curva γ ottenuta prendendo il segmento reale $[-R, R]$ e la semicirconferenza di centro l'origine e raggio R contenuta nel semipiano superiore. Solo il polo $z_1 = (-1 + \sqrt{3})/2$ è interno alla curva γ (per R grandi), per cui il Teorema dei residui fornisce l'integrale: $I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1}(f)$.

Si osservi che la condizione per applicare il risultato generale è soddisfatta: per $|z| \geq 2$ si ha

$$\left| \frac{1}{z^2 + z + 1} \right| \leq \frac{1}{|z|^2 \left(1 + \frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|^2}\right)} \leq \frac{4}{|z|^2}$$

Il residuo in z_1 vale $\frac{1}{i\sqrt{3}}$, poiché $f(z) = 1/((z - z_1)(z - z_2)$ e quindi $\operatorname{Res}_{z_1}(f) = 1/(z_1 - z_2) = \frac{1}{i\sqrt{3}}$. Dunque $I = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Esercizio 4. Si consideri il polinomio $p(z) = z^4 + 3z^2 + z + 1$. Sia A l'intersezione del disco chiuso $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$ con il semipiano $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

(4a) Mostrare che p ha due radici nel disco chiuso D e nessuna di esse è reale.

(4b) Mostrare che p ha una sola radice in A.

SOLUZIONE: (4a) Applichiamo il principio di Rouché sul disco aperto $D_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 + \epsilon\}$, con $\epsilon > 0$, e sia γ il suo bordo. Per $|z| = 1 + \epsilon$ vale

$$|p - 3z^2| = |z^4 + z + 1| \leq |z|^4 + |z| + 1 = (1 + \epsilon)^4 + (1 + \epsilon) + 1 < 3(1 + \epsilon)^2 = |3z^2|$$

per ogni ϵ sufficientemente piccolo (infatti la funzione reale $(f(x) = x^4 + x + 1 - 3x^2$ si annulla per $x = 1$ ed è negativa per $x > 1$ vicini a 1, essendo $f'(1) = -1 < 0)$. Quindi ogni disco D_ϵ contiene 2 radici di p e D, che è l'intersezione dei dischi aperti D_ϵ, contiene 2 radici di p.

Le radici non sono reali: $p(-1) \neq 0$, $p(1) \neq 0$ e per $x \in (0, 1)$ vale: $p(x) = x^4 + 3x^2 + x + 1 \geq x + 1 > 0$.

(4b) Il polinomio p ha coefficienti reali e quindi le sue radici sono reali o complesse coniugate: quindi p ha una sola radice in $A \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.